



رياضيات الأعمال

الصف الثاني عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

12

إجابات التمارين

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:



06-5376262 / 237



06-5376266



P.O.Box: 2088 Amman 11941



@nccdjor



feedback@nccd.gov.jo



www.nccd.gov.jo



إجابات كتاب التمارين - مادة رياضيات الأعمال - الصف الثاني عشر الأكاديمي ف1

الوحدة الأولى: المصفوفات

أستعد لدراسة الوحدة

تبسيط مقادير عددية صفحة 6

1	$4(-1) + 3(6) - 5(8) = -4 + 18 - 40 = -26$
2	$3(4 - (-2)) + 5(-3 + 8) = 3(6) + 5(5) = 18 + 25 = 43$
3	$9(7 - 4) + 2(-4)^2 = 9 \times 3 + 2 \times 16 = 27 + 32 = 59$
4	$4(7 + 6 - 2) - 2(-3 + 9 - (-2)) = 4 \times 11 - 2 \times 8 = 44 - 16 = 28$
5	$4(-3)(5) + 6(-2)(-8) + 0(4)(-3) = -60 + 96 + 0 = 36$
6	$2(3(-4) - 5(-6)) - 3(5(-2) - 6(3)) = 2(-12 + 30) - 3(-10 - 18)$ $= 2(18) - 3(-28) = 36 + 84 = 120$

حل المعادلة الخطية بمتغير واحد صفحة 7

7	$7x - 6 = 18 \Rightarrow 7x = 24$ $\Rightarrow x = \frac{24}{7}$
8	$-5x + 3 = 2x + 8 \Rightarrow 7x = -5$ $\Rightarrow x = -\frac{5}{7}$
9	$2(x - 5) + 6x = 8 \Rightarrow 2x - 10 + 6x = 8$ $\Rightarrow 8x = 18$ $\Rightarrow x = \frac{18}{8} = 2.25$
10	$38 + 7k = 8(k + 4) \Rightarrow 38 + 7k = 8k + 32$ $\Rightarrow k = 6$

حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد صفحة 7

11	$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x + 6) = 0$ $\Rightarrow x = 0 , x = -6$
----	---



12	$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$ $\Rightarrow x = 4 , x = -1$
13	$10x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (5x + 4)(2x - 1) = 0$ $\Rightarrow x = -\frac{4}{5} , x = \frac{1}{2}$
14	$x^2 - 2x = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$ $a = 1 , b = -2 , c = -4$ $x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$ $\Rightarrow x = 1 - \sqrt{5} , x = 1 + \sqrt{5}$
حل أنظمة معادلات خطية بمتغيرين بالحذف والتعويض صفحة 9	
15	$x + 3y = 17 \dots\dots\dots (1)$ $2x - 3y = -2 \dots\dots\dots (2)$ بجمع المعادلتين (1) و (2) ينتج: $3x = 15 \Rightarrow x = 5$ وبالتعويض في المعادلة الأولى ينتج: $5 + 3y = 17 \Rightarrow y = 4$ إذن، الحل هو (5,4)
16	$3x - 4y = 16 \dots\dots\dots (1)$ $x = 2y - 3 \Rightarrow x - 2y = -3 \dots\dots\dots (2)$ نضرب المعادلة الثانية في 2 - ثم نجمع المعادلتين فينتج: $3x - 4y = 16$ $-2x + 4y = 6$ $\Rightarrow x = 22$ وبالتعويض في المعادلة الثانية ينتج: $22 - 2y = -3 \Rightarrow y = \frac{25}{2}$ إذن، الحل هو $(22, \frac{25}{2})$



الدرس الأول: مقدمة في المصفوفات

1	2×3
2	3×1
3	2×2
4	1×3
5	3×3
6	4×3
7	$P = \begin{bmatrix} 40 & 60 & 75 \\ 30 & 40 & 55 \\ 50 & 70 & 90 \\ 65 & 90 & 125 \end{bmatrix}$
8	$p_{32} = 70$ ويمثل سعر القهوة وسط بالقروش في أحد المحال التجارية
9	$p_{23} = 55$
10	$x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$ $x + y = 8 \Rightarrow 1 + y = 8 \Rightarrow y = 7$ $z = y + 4 \Rightarrow z = 7 + 4 = 11$
11	$\begin{bmatrix} 54 & 94 & 75 \\ 12 & 23 & 18 \end{bmatrix}$
12	$54 + 94 + 75 = 223$ ويمثل مجموع المدارس التي يتوقع إنشاؤها في المحافظات الثلاثة.
13	$94 + 23 = 117$ ويمثل مجموع المدارس والمراكز الصحية التي يتوقع إنشاؤها في المحافظة الثانية.



الدرس الثاني: العمليات على المصفوفات

1	$A + B = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 2 & 8 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$
2	بما أن C, B من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $B + C$
3	$C - D = \begin{bmatrix} 5 & -30 & -28 \\ -11 & -10 & 28 \end{bmatrix}$
4	$B - A = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -8 & -6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$
5	$4A = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 20 & 28 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$
6	$3A - 2B = \begin{bmatrix} -12 & -16 \\ 21 & 19 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$
7	$D + 2C = \begin{bmatrix} -17 & 30 & 52 \\ 14 & 25 & -16 \end{bmatrix}$
8	$-\frac{2}{3}D = \begin{bmatrix} 6 & -20 & -24 \\ -8 & -10 & 16 \end{bmatrix}$
9	المضاعف المشترك للمقامات هو 12، لذلك نحول جميع عناصر المصفوفة إلى كسور مقامها جميعها 12، ثم نخرج $\frac{1}{12}$ عاملاً مشتركاً لعناصر المصفوفة. $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{12} & -\frac{6}{12} \\ \frac{3}{12} & \frac{14}{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 20 & -6 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$ $k = \frac{1}{12}, \quad M = \begin{bmatrix} 20 & -6 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$
10	$3 + b = 9 \Rightarrow b = 6$ $a + 11 = 3b \Rightarrow a + 11 = 18 \Rightarrow a = 7$ $-2 - 4 = c \Rightarrow c = -6$ $-8 + 12 = d \Rightarrow d = 4$



11	$x - y = 4$ $x + y = 6$ بجمع المعادلتين نجد أن: $2x = 10 \Rightarrow x = 5$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن: $x + y = 6 \Rightarrow 5 + y = 6 \Rightarrow y = 1$
12	$3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $2B = 3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $2B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $2B = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 14 & 14 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1.5 & -4 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$
13	$x \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 - y & -7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & x & 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 - y & -7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & x & 3x + 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 - y & -7 \end{bmatrix}$ $x = 3 - y$ $3x + 5y = -7$ نعوض x من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية، فنحصل على: $3(3 - y) + 5y = -7 \Rightarrow 9 - 3y + 5y = -7$ $\Rightarrow 2y = -16$ $\Rightarrow y = -8$ $\Rightarrow x = 3 + 8 = 11$
14	لتكن المصفوفة E انتاج المصانع الثلاثة في النصف الأول، ولتكن F انتاج المصانع الثلاثة في النصف الثاني. فإن المصفوفة التي تمثل انتاج المصانع الثلاثة في العام كاملاً هي E + F $E + F = \begin{bmatrix} 700 & 1300 & 670 \\ 650 & 1000 & 890 \\ 480 & 900 & 540 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 850 & 1200 & 670 \\ 540 & 860 & 530 \\ 620 & 750 & 490 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 1550 & 2500 & 1340 \\ 1190 & 1860 & 1420 \\ 1100 & 1650 & 1030 \end{bmatrix}$



الدرس الثالث: ضرب المصفوفات

1	بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإنه لا يمكن إيجاد $A \times B$
2	$\begin{matrix} A & \times & C & = & A \times C \\ 5 \times 3 & & 3 \times 5 & & 5 \times 5 \end{matrix}$ مُساويان رتبة $A \times C$
3	$\begin{matrix} C & \times & A & = & C \times A \\ 3 \times 5 & & 5 \times 3 & & 3 \times 3 \end{matrix}$ مُساويان رتبة $C \times A$
4	$\begin{matrix} B & \times & C & = & B \times C \\ 2 \times 3 & & 3 \times 5 & & 2 \times 5 \end{matrix}$ مُساويان رتبة $B \times C$
5	بما أن عدد أعمدة المصفوفة C لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإنه لا يمكن إيجاد $C \times B$
6	$AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 7 & -20 \\ -11 & 7 & 26 \end{bmatrix}$
7	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف المصفوفة A ، فإنه لا يمكن إيجاد $B \times A$
8	$BC = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -5 & 30 \end{bmatrix}$
9	$CB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ -32 & -9 & 29 \\ -15 & 8 & 33 \end{bmatrix}$
10	$BD = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 5 \end{bmatrix}$
11	$2A + 3BC = 2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -5 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 23 \\ -13 & 98 \end{bmatrix}$
12	$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -14 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$



13	$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 7 & -14 \\ 7 & 14 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -70 \\ 35 & 42 \end{bmatrix}$ أو $A^3 = A A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & -14 \\ 7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -70 \\ 35 & 42 \end{bmatrix}$
14	$(CB)^2 = CB \times CB = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ -32 & -9 & 29 \\ -15 & 8 & 33 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ -32 & -9 & 29 \\ -15 & 8 & 33 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -402 & 24 & 582 \\ -211 & 57 & 376 \\ -781 & 72 & 1171 \end{bmatrix}$
15	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} y+9 & -7 \\ xy+6 & -x-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ $-x-4 = -3 \Rightarrow x = -1$ $y+9 = 7 \Rightarrow y = -2$
16	$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 16 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 90 \end{bmatrix}$ أو $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 18 & 30 \\ 0 & 12 \\ 18 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 90 \end{bmatrix}$
17	$B^3 = B \times B \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$



رتبة A هي 2×1 فيجب أن تكون رتبة C أيضًا 2×1 حتى يمكن جمعها مع المصفوفة A .

$$C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ افترض أن}$$

$$A + C = BC \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 + x \\ 18 + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 4y \\ 2x - y \end{bmatrix}$$

18

$$6 + x = 3x + 4y \Rightarrow 2x + 4y = 6$$

$$18 + y = 2x - y \Rightarrow 2x - 2y = 18$$

ب طرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى نجد: $y = -2$

وبتعويض قيمة y في المعادلة الأولى نجد: $x = 7$

$$\text{إذن، } C = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

19

$$\begin{bmatrix} 1200 & 2300 & 900 \\ 3100 & 2800 & 1100 \\ 3700 & 2600 & 800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.09 & 0.095 \\ 0.09 & 0.1 \\ 0.13 & 0.12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 432 & 452 \\ 674 & 706.5 \\ 671 & 707.5 \end{bmatrix}$$

$$452 - 432 = 20$$

20

$$706.5 - 674 = 32.5$$

$$707.5 - 671 = 36.5$$

المنسوب الثالث هو الأكثر استفادة من تغيير نسب العمولة.

21

العبارة صحيحة أحيانًا، إذ إن المصفوفتين المربعيتين يمكن إيجاد حاصل ضربهما بأي ترتيب كان إذا كان لهما الرتبة نفسها.

وكذلك المصفوفتان ذات الرتبتين: $i \times j$ و $j \times i$ يمكن أيضًا إيجاد حاصل ضربهما بأي ترتيب كان حتى لو لم تكونا مربعيتين.

22

العبارة صحيحة أحيانًا، لأنه إذا كانت إحدى المصفوفتين صفرية فبالأكيد حاصل ضربها مصفوفة أخرى صفرية أيضًا.

لكن، قد يكون حاصل ضرب المصفوفتين مصفوفة صفرية دون أن تكون أي منهما صفرية، مثلًا:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{مثال آخر: } \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



1	$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 6 = 11$
2	$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1$
3	$\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -30 + 30 = 0$
4	$\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 7 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$ $= 7(0 + 20) + 3(48 - 8) + 1(-40 - 0)$ $= 140 + 120 - 40 = 220$
5	$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ $= 4(-6 - 0) + 2(12 + 6) - 4(0 + 3)$ $= -24 + 36 - 12 = 0$
6	$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ $= 5(56 - 12) + 3(32 + 12) + 1(8 + 14)$ $= 220 + 132 + 22 = 374$
7	$ AB = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 39 - 4 = 35$ $ BA = \begin{vmatrix} -9 & 26 \\ -10 & 25 \end{vmatrix} = -225 + 260 = 35$
8	$x^2 - 16 = 9 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$
9	$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ $ A^2 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = 16$ $ A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$ نلاحظ أن $A^2 = A ^2$



10

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - y \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x(3 + 5) - y(-1 - 2) + (5 - 6) = 0$$

$$\Rightarrow 8x + 3y - 1 = 0$$

$$3x - 5y = 22$$

$$2x + y = 6$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = |C| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 = 13$$

11

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 22 & -5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{13} = \frac{22 + 30}{13} = \frac{52}{13} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 22 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{13} = \frac{18 - 44}{13} = \frac{-26}{13} = -2$$

إذن، حل النظام هو: $(4, -2)$

$$5x + 3y = 7$$

$$2x - 4y = 8$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad D = |C| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 6 = -26$$

12

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{-28 - 24}{-26} = \frac{-52}{-26} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{40 - 14}{-26} = \frac{26}{-26} = -1$$

إذن، حل النظام هو: $(2, -1)$



13

$$3x - y = 10$$

$$5x - 4y = -6$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \quad D = |C| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 5 = -7$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-40 - 6}{-7} = \frac{-46}{-7} = \frac{46}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-18 - 50}{-7} = \frac{-68}{-7} = \frac{68}{7}$$

إذن، حل النظام هو: $\left(\frac{46}{7}, \frac{68}{7}\right)$

14

مصفوفة المعاملات عمودها الأول هو معاملات x وعمودها الثاني هو معاملات y ،
معاملات x تظهر في العمود الأول لمحددة y ، و معاملات y تظهر في العمود الثاني لمحددة x إذن:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6 + 5}{3} = \frac{11}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-4 - 3}{3} = \frac{-7}{3}$$

15

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 7 & 11 & 1 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 15 & 1 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 1 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= -2(11 - 15) - 5(7 - 1) + 1(105 - 11)$$

$$= 8 - 30 + 94 = 72$$

$$Area = \frac{1}{2} |A| = \frac{1}{2} \times 72 = 36$$



16

ليكن x عدد الأوراق النقدية من فئة الدينار، فيكون عدد الأوراق النقدية من فئة خمسة دنانير هو $4x$ ،
وليكن عدد الأوراق النقدية من فئة عشرة الدنانير y .

$$x + 4x + y = 75 \Rightarrow 5x + y = 75$$

$$x + 20x + 10y = 460 \Rightarrow 21x + 10y = 460$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 10 \end{bmatrix}$$

$$D = |C| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 10 \end{vmatrix} = 50 - 21 = 29$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 75 & 1 \\ 460 & 10 \end{vmatrix}}{29} = \frac{750 - 460}{29} = \frac{290}{29} = 10$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 75 \\ 21 & 460 \end{vmatrix}}{29} = \frac{2300 - 1575}{29} = \frac{725}{29} = 25$$

إذن، عدد الأوراق النقدية من فئة الدينار هو 10، وعدد الأوراق النقدية من فئة عشرة الدنانير 25،
وعدد الأوراق النقدية من فئة خمسة دنانير هو 4×10 ويساوي 40 ورقة.



الدرس الخامس: النظير الضربي للمصفوفة

1	$AB = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بما أن $AB = I$ ، فإن كلا من المصفوفة A والمصفوفة B تمثل نظيرًا ضربيًا للآخرى.
2	$FG = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.75 & 14.25 \\ 4.75 & 15.25 \end{bmatrix}$ بما أن $FG \neq I$ ، فإن كلا من المصفوفة F والمصفوفة G لا تمثل نظيرًا ضربيًا للآخرى.
3	$M = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} , M = 20 - 20 = 0$ بما أن $M = 0$ ، فإن المصفوفة M منفردة، ولا نظير ضربي لها.
4	$N = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} , N = -6 + 66 = 60$ بما أن $N \neq 0$ ، فإن المصفوفة N غير منفردة، ولها نظير ضربي هو N^{-1} $N^{-1} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{11}{60} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}$
5	$R = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} , R = -9 - 8 = -17$ بما أن $R \neq 0$ ، فإن المصفوفة R غير منفردة، ولها نظير ضربي هو R^{-1} $R^{-1} = -\frac{1}{17} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{2}{17} & \frac{3}{17} \end{bmatrix}$



$$-2x + y = 13$$

$$x - 2y = -11$$

6

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 4 - 1 = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(-5, 3)$

$$4x + 5y = 22$$

$$3x + 4y = 17$$

7

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 16 - 15 = 1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 22 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(3, 2)$



$$3x - 8y = 34$$

$$-4x + 2y = 28$$

8

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 6 - 32 = -26$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{26} & \frac{-8}{26} \\ \frac{-4}{26} & \frac{-3}{26} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{-2}{26} & \frac{-8}{26} \\ \frac{-4}{26} & \frac{-3}{26} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 34 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-68 - 224}{26} \\ \frac{-136 - 84}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-292}{26} \\ \frac{-220}{26} \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $\left(\frac{-292}{26}, \frac{-220}{26}\right)$

9

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 15 & x+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(x+2) - 15 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (x+5)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x = -5, x = 3$$

10

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, |A| = -4 + 6 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, |A^{-1}| = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

11

$$AB = B^5A \Rightarrow BAB = BB^5A$$

$$\Rightarrow BAB = B^6A$$

$$\Rightarrow BAB = IA$$

$$\Rightarrow B(AB) = A$$



12

$$\begin{aligned} BA^2 = A &\Rightarrow BAA = A \\ &\Rightarrow BAAA^{-1} = AA^{-1} \\ &\Rightarrow BA = I \\ &\Rightarrow BAA^{-1} = A^{-1} \\ &\Rightarrow B = A^{-1} \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, |A| = 4 - 3 = 1, A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -5 & a \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, |B| = -25 - 6a$$

بما أن $a \neq -\frac{25}{6}$ ، فإن المصفوفة B غير مفردة، ولها نظير ضربي هو B^{-1}

$$B^{-1} = \frac{1}{-25 - 6a} \begin{bmatrix} 5 & -a \\ -6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{-25 - 6a} & \frac{-a}{-25 - 6a} \\ \frac{-6}{-25 - 6a} & \frac{-5}{-25 - 6a} \end{bmatrix}$$

13

$$B = B^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{-25 - 6a} & \frac{-a}{-25 - 6a} \\ \frac{-6}{-25 - 6a} & \frac{-5}{-25 - 6a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & a \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{25 + 6a} = 6$$

$$\Rightarrow 25 + 6a = 1$$

$$\Rightarrow 6a = -24$$

$$\Rightarrow a = -4$$



بما أن 60% من السعرات مصدرها البروتينات والدهون، فإن 40% الباقية مصدرها من الكربوهيدرات، فإذا كانت كمية الكربوهيدرات في طعامه g ، فإن

$$4 \times c = \frac{40}{100} \times 3600 \Rightarrow 4c = 1440$$

$$\Rightarrow c = \frac{1440}{4} = 360 \text{ g}$$

وإذا كانت كمية البروتين x ، وكمية الدهون y ، فإن:

$$x + y = 750 - 360 \Rightarrow x + y = 390$$

$$4x + 9y = 3600 - 1440 \Rightarrow 4x + 9y = 2160$$

فالمعادلة المصفوفية التي تستعمل لحل هاتين المعادلتين هي:

14

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 390 \\ 2160 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 9 - 4 = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 390 \\ 2160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 270 \\ 120 \end{bmatrix}$$

مقدار ما يتناوله هذا اللاعب من البروتينات $270g$ ، ومن الدهون $120g$ ، ووجدنا في بداية الحل أن

ما يتناوله من الكربوهيدرات $360g$



الوحدة الثانية: الخوارزميات ونظرية المخططات

أستعد لدراسة الوحدة

إيجاد الوسط الحسابي لبيانات مفردة صفحة 20

1	$\bar{x} = \frac{89 + 90 + 95 + 72 + 83 + 100 + 94}{7} = 89$
2	$\bar{x} = \frac{345 + 279 + 583 + 404 + 556 + 702 + 636}{7} = 500.71$
3	$\bar{x} = \frac{78 + 82 + 85 + 74 + 98 + 90 + 80 + 62 + 71 + 91}{10} = 81.1$
4	$\bar{x} = \frac{24.6 + 20.9 + 25.5 + 26.9 + 27.1 + 22.36}{6} = 24.56$

حل مسألة باستخدام خطة التخمين والتحقق صفحة 21

ليكن x عمر سماح، و y عمر سهى.

$$x - y = 4$$

$$x + y = 20$$

أخمن	أتحقق	
	x	y
15	5	$15 - 5 = 10$
10	10	$10 - 10 = 0$
11	9	$11 - 9 = 2$
12	8	$12 - 8 = 4$

إذن، عمر سماح 12 سنة، وعمر سهى 8 سنوات.

ليكن x عدد أكياس السكر، و y عدد أكياس الأرز.

$$x + y = 8$$

$$4x + 7y = 41$$

أخمن	أتحقق	
	x	y
7	1	$4(7) + 7(1) = 35$
6	2	$4(6) + 7(2) = 38$
4	4	$4(4) + 7(4) = 44$
5	3	$4(5) + 7(3) = 41$

إذن، عدد أكياس السكر 5، و عدد أكياس الأرز 3.



ليكن x طول المستطيل، و y عرضه.

$$x = 2y$$

$$2x + 2y = 210$$

7

أُخْمِنَ		أُتْحَقِقُ	
x	y	$2x + 2y$	
50	25	$2(50) + 2(25) = 150$	أقل من 210 ×
60	30	$2(60) + 2(30) = 180$	أقل من 210 ×
80	40	$2(80) + 2(40) = 240$	أكبر من 210 ×
70	35	$2(70) + 2(35) = 210$	صحيح ✓

إذن، طول المستطيل 70، و عرضه 35.



الدرس الأول: الخوارزميات

	step	N	S	T	Is S=T?	Print
1	1	7				
	2		3.5			
	3			2.75		
	4				no	
	5		2.75			
	6 → 3			2.65		
	4				no	
	5		2.65			
	6 → 3			2.65		
	4				yes	
	7					2.65
$\sqrt{7} \approx 2.65$						
2	step	N	S	T	Is S=T?	Print
	1	3				
	2		1.5			
	3			1.75		
	4				no	
	5		1.75			
	6 → 3			1.73		
	4				no	
	5		1.73			
	6 → 3			1.73		
	4				yes	
	7					1.73
$\sqrt{3} \approx 1.73$						



3

step	N	S	T	Is S=T?	Print
1	11				
2		5.5			
3			3.75		
4				no	
5		3.75			
6 → 3			3.34		
4				no	
5		3.34			
6 → 3			3.32		
4				no	
5		3.32			
6 → 3			3.32		
4				yes	
7					3.32

$$\sqrt{11} \approx 3.32$$

4

step	P	R	T	I	A	M	Print
1	600	4	5				
2				120			
3					720		
4						12	
5							12
6							Stop

مخرج هذه الخوارزمية هو العدد 12

5

a	b	T	Is T>90?	Print
3	1	10	no	
4	2	20	no	
5	3	34	no	
6	4	52	no	
7	5	74	no	
8	6	100	Yes	8,6
Stop				

مُخرجا الخوارزمية هما العددان 8,6



6	u	v	Is u+v=0?	f	Print	مُخرج الخوارزمية هو العدد 4
	8	8	no	4	4	
	Stop					

7	u	v	Is u+v=0?	f	Print	مُخرج الخوارزمية هو (خطأ)
	7	-7	yes		خطأ	
	Stop					

8	u	v	Is u+v=0?	f	Print	مُخرج الخوارزمية هو العدد 3
	12	4	no	3	3	
	Stop					

9	S	X	Is X<1?	Print	مُخرج الخوارزمية هو العدد 2
	1	48			
		4.8	no		
	2	0.48	yes	2	
	Stop				

10	S	X	I	Print	مُخرج الخوارزمية هو العدد 4
	1	9170			
		917	no		
	2	91.7	no		
	3	9.17	no		
	4	0.917	yes	4	
Stop					

11	S	X	Is X<1?	Print	مُخرج الخوارزمية هو العدد 1
	1	-800			
		-80	yes	1	
Stop					



الدرس الثاني: خوارزمية تعبئة الصندوق

1	$\frac{16 + 23 + 18 + 9 + 4 + 20 + 35 + 5 + 17 + 13 + 6 + 11}{45} = 3.93 \approx 4$ الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة هو 4 صناديق. $B_1: 16, 23, 4$ $B_2: 18, 9, 5, 13$ $B_3: 20, 17, 6$ $B_4: 35$ $B_5: 11$ عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 5 صناديق. الارتفاع المهدور هو $5 \times 45 - 177 = 48$
2	الارتفاعات مرتبة تنازلياً: $35, 23, 20, 18, 17, 16, 13, 11, 9, 6, 5, 4$ $B_1: 35, 9$ $B_2: 23, 20$ $B_3: 18, 17, 6, 4$ $B_4: 16, 13, 11, 5$ عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 4 صناديق. الارتفاع المهدور هو $4 \times 45 - 177 = 3$
3	توصلنا إلى الحل الأمثل باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة، لأن عدد الصناديق اللازمة يساوي الحد الأدنى.



	$\frac{5 + 1 + 8 + 13 + 16 + 5 + 8 + 2 + 15 + 12 + 10}{20} = 4.75 \approx 5$ الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة هو 5 صناديق.
4	$B_1: 5, 1, 8, 5$ $B_2: 13, 2$ $B_3: 16$ $B_4: 8, 12$ $B_5: 15$ $B_6: 10$ عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 6 صناديق. الارتفاع المهدور هو $6 \times 20 - 95 = 25$
5	الارتفاعات مرتبة تنازلياً: $16, 15, 13, 12, 10, 8, 8, 5, 5, 2, 1$ $B_1: 16, 2, 1$ $B_2: 15, 5$ $B_3: 13, 5$ $B_4: 12, 8$ $B_5: 10, 8$ عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 5 صناديق. الارتفاع المهدور هو $5 \times 20 - 95 = 5$
6	$B_1: 5, 15$ $B_2: 8, 12$ $B_3: 13, 5, 2$ $B_4: 1, 16$ $B_5: 8, 10$ عدد الصناديق اللازمة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 5 صناديق. الارتفاع المهدور هو $5 \times 20 - 95 = 5$
7	توصلنا إلى الحل الأمثل باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة وخوارزمية الصندوق الكامل، لأن عدد الصناديق اللازمة يساوي الحد الأدنى.



$$\frac{23 + 29 + 11 + 34 + 10 + 14 + 35 + 17}{50} = 3.46 \approx 4$$

الحد الأدنى من عدد أقراص التخزين اللازمة هو 4 أقراص.

$B_1: 23, 11, 10$

$B_2: 29, 14$

$B_3: 34$

$B_4: 35$

$B_5: 17$

8

عدد الأقراص اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 5 أقراص.

مساحة التخزين المهدورة هي $5 \times 50 - 173 = 77 \text{ MB}$

$B_1: 23, 10, 17$

$B_2: 29, 11$

$B_3: 34, 14$

$B_4: 35$

9

عدد الأقراص اللازمة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 أقراص.

مساحة التخزين المهدورة هي $4 \times 50 - 173 = 27 \text{ MB}$

وصلنا إلى الحل الأمثل باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، لأن عدد الصناديق اللازمة يساوي الحد الأدنى.

ملحوظة: يوجد حل آخر باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل وهو كالاتي:

$B_1: 29, 11, 10$

$B_2: 23, 14$

$B_3: 34$

$B_4: 35$

$B_5: 17$

10

ولكن في هذه الحالة لا نحصل على الحل الأمثل.



	$\frac{650 + 431 + 245 + 643 + 455 + 134 + 710 + 290 + 550 + 452}{1000} = \frac{4560}{1000} = 4.56$ ≈ 5 الحد الأدنى من عدد الألواح الخشبية اللازمة هو 5 ألواح.
11	$B_1: 650, 245$ $B_2: 431, 455$ $B_3: 643, 134$ $B_4: 710, 290$ $B_5: 550$ $B_6: 452$ عدد الألواح اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 6 ألواح. طول الجزء المهدور هو $6 \times 1000 - 4560 = 1440 \text{ mm}$
12	الأطوال مرتبة تنازلياً: 710 650 643 550 455 452 431 290 245 134 $B_1: 710, 290$ $B_2: 650, 245$ $B_3: 643, 134$ $B_4: 550, 431$ $B_5: 455$ $B_6: 452$ عدد الألواح اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 5 ألواح. طول الجزء المهدور هو $5 \times 1000 - 4560 = 1440 \text{ mm}$
13	لم نتوصل إلى الحل الأمثل لا باستخدام خوارزمية الملاءمة الأولى ولا باستخدام خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة.



	$\frac{175 + 135 + 210 + 105 + 100 + 150 + 60 + 30 + 90 + 125}{300} = \frac{1180}{300} = 3.93 \approx 4$ الحد الأدنى من عدد الشاحنات اللازمة هو 4 شاحنات.
14	$B_1: 175, 105$ $B_2: 135, 100, 60$ $B_3: 210, 30$ $B_4: 150, 90$ $B_5: 125$ عدد الشاحنات اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 5 شاحنات.
	الكتل مرتبة تنازلياً: 210 175 150 135 125 105 100 90 60 30
15	$B_1: 210, 90$ $B_2: 175, 125$ $B_3: 150, 135$ $B_4: 105, 100, 60, 30$ عدد الشاحنات اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 4 شاحنات.
16	توصلنا إلى الحل الأمثل باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة، لأن عدد الشاحنات اللازمة باستعمال هذه الخوارزمية يساوي الحد الأدنى.
	$\frac{25 + 22 + 30 + 18 + 29 + 21 + 27 + 21}{50} = \frac{193}{50} = 3.86 \approx 4$ الحد الأدنى من عدد الأنابيب اللازمة هو 4 أنابيب.
	الأطوال مرتبة تنازلياً: 30 29 27 25 22 21 21 18
17	$B_1: 30, 18$ $B_2: 29, 21$ $B_3: 27, 22$ $B_4: 25, 21$ عدد الأنابيب اللازمة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة هو 4 أنابيب. الجزء المهدور في الأنابيب هو $4 \times 50 - 193 = 7 \text{ cm}$



18

$B_1: 29, 21$

$B_2: 25, 22$

$B_3: 30, 18$

$B_4: 27, 21$

عدد الأنايب اللازمة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 أنايب.

الجزء المهدور في الأنايب هو $4 \times 50 - 193 = 7 \text{ cm}$

19

توصلنا إلى الحل الأمثل باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة وخوارزمية الصندوق الكامل، لأن عدد الصناديق اللازمة في كل منها يساوي الحد الأدنى.



الدرس الثالث: المخططات

تمثل الرؤوس مجموعة من المدن.

وتمثل الحافات الطرق الرئيسية التي تربط هذه المدن.

1

2

WUCNO

WCO

3

ترتبط C بخمس مدن مباشرة، وهي: W, U, K, O, N.

4

تكلفة الذهاب من المنطقة C إلى المنطقة D مباشرة هي: JD 6

5

المسار

تكلفة الذهاب من المنطقة A إلى المنطقة D

AD

JD 2

AED

$5 + 3 = \text{JD } 8$

ACD

$4 + 6 = \text{JD } 10$

ABCD

$2 + 3 + 6 = \text{JD } 11$

أقل تكلفة للذهاب من المنطقة A إلى المنطقة D هي 2 دينار على المسار المباشر AD

6

المسار

تكلفة الذهاب من المنطقة B إلى المنطقة E

BAE

$2 + 5 = \text{JD } 7$

BADE

$2 + 2 + 3 = \text{JD } 7$

BACDE

$2 + 4 + 6 + 3 = \text{JD } 15$

BCAE

$3 + 4 + 5 = \text{JD } 12$

BCDE

$3 + 6 + 3 = \text{JD } 12$

BCADE

$3 + 4 + 2 + 3 = \text{JD } 12$

BCDAE

$3 + 6 + 2 + 5 = \text{JD } 16$

أقل تكلفة للذهاب من المنطقة B إلى المنطقة E هي JD 7 على المسار BAE أو المسار BADE

7

مجموعة الرؤوس هي: (A, B, C, D, E)

مجموعة الحافات هي:

(AB, AC, AE, BB, BC, BC, BC, CE, CD, DE, DE, DE, DD)



8		نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
		فردية	3	A
		زوجية	6	B
		زوجية	6	C
		زوجية	6	D
		فردية	5	E
9	مجموعة الدرجات للمخطط: $deg = (3,5,6,6,6)$			
10	XVUT			
	XVURST			
	XVUST			
	XYVUT			
	XYVURST			
	XYVUST			
	XYWVUT			
11	XYWVURST			
	XYWVUST			
12	للمخطط 11 حافة، إذن، مجموع درجات رؤوسه يساوي:			
	$\sum_{k=1}^5 \deg V_k = 2 \times 11 = 22$			
13	للمخطط 20 حافة، إذن، مجموع درجات رؤوسه يساوي:			
	$\sum_{k=1}^9 \deg V_k = 2 \times 20 = 40$			
13	مجموعة الرؤوس هي: (A, B, C, D, E, F, G, H)			
	مجموعة الحافات هي: $(AB, AD, AE, BF, BC, CG, CD, DH, HG, HE, FE, FG)$			



14

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
فردية	3	A
فردية	3	B
فردية	3	C
فردية	3	D
فردية	3	E
فردية	3	F
فردية	3	G
فردية	3	H

15

مجموعة الدرجات للمخطط: $deg = (3,3,3,3,3,3,3,3)$

16

ممشي لا يمثل ممراً: ABCGHD AEFBA

ممر لا يمثل طريقاً: AEFGCBF

طريق: ABCD

دائرة: EFGHE

دائرة هاملتون: AEFGHD CBA

دائرة أويلر: لا يمكن إيجاد دائرة أويلر في هذا المخطط

17

مجموعة الرؤوس هي: (F, I, J, L, K)

مجموعة الحافات هي: (FJ, FI, IJ, JL, JK, LK)

18

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
زوجية	2	F
زوجية	4	J
زوجية	2	I
زوجية	2	L
زوجية	2	K



19

ممشي لا يمثل ممراً: FIJLKJI

ممر لا يمثل طريقاً: FJKLJI

طريق: FIJ

دائرة: JKLJ

دائرة هاملتون: لا يمكن إيجاد دائرة هاملتون في هذا المخطط

دائرة أويلر: FIJLKJF



الدرس الرابع: أنواع خاصة من المخططات

المخطط ليس بسيطاً، لأنه يحتوي حافات متعددة وحلقات.

نعم، لأنه يمكن إيجاد طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه.

1

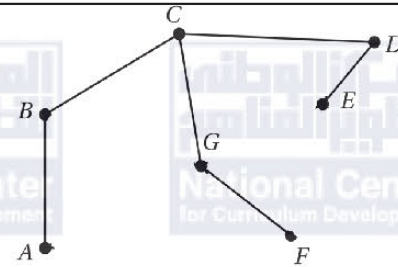
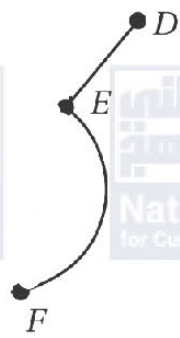
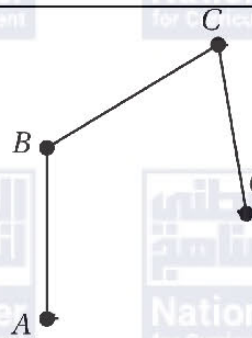
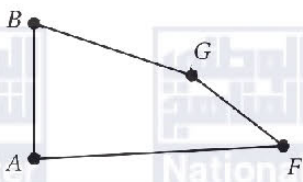
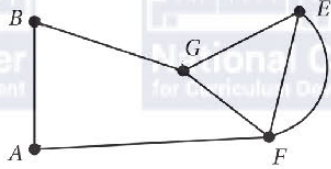
2

3

4

5

6



المخطط بسيط، لأنه لا يحتوي حافات متعددة ولا حلقات.

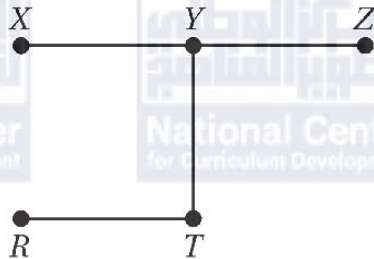


7

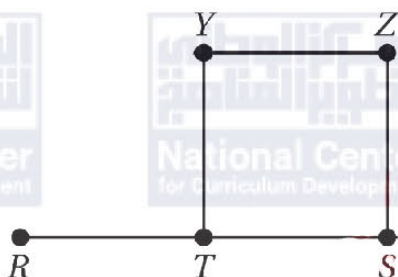
نعم، لأنه يمكن إيجاد طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه.

8

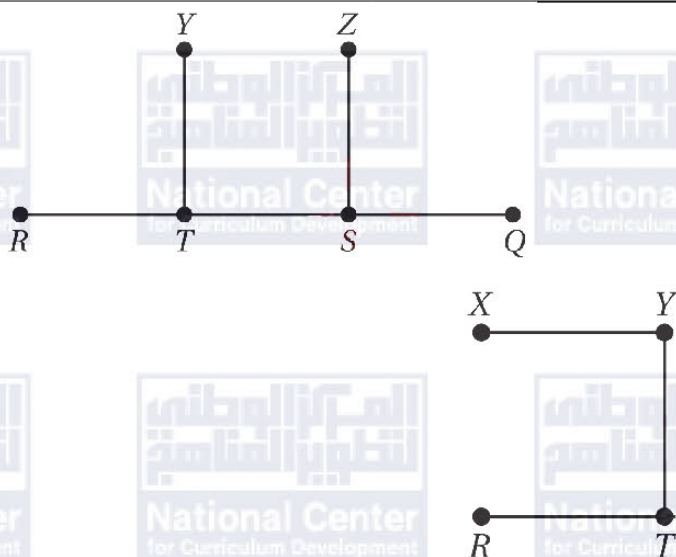
المخطط ليس كاملاً، لأن بعض رؤوسه غير متصلة بجواف.



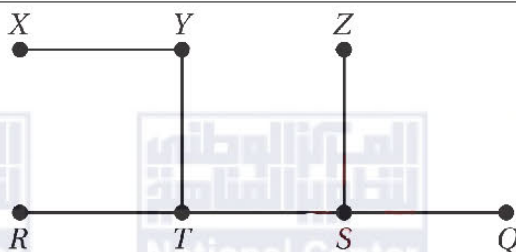
9



10

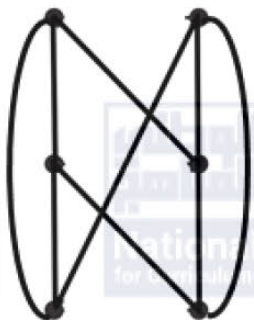


11

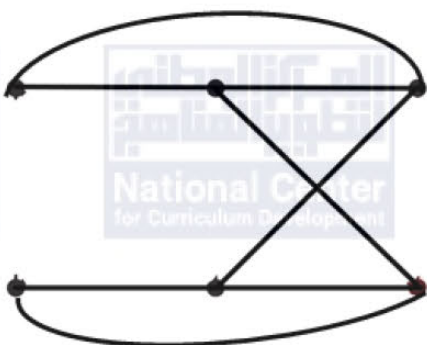




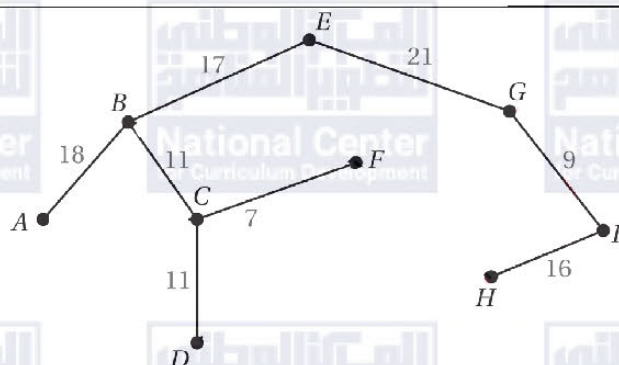
12



13



14



الحافات التي أضيفت بالترتيب هي: HI, IG, GE, EB, BC, CF, CD, BA

أقل تكلفة تلزم لتبليط الممرات للربط بين جميع المحطات الرئيسة في الحديقة هي:

15

$$(16 + 9 + 21 + 17 + 11 + 7 + 18 + 11) \times 25 = JD 2750$$

16

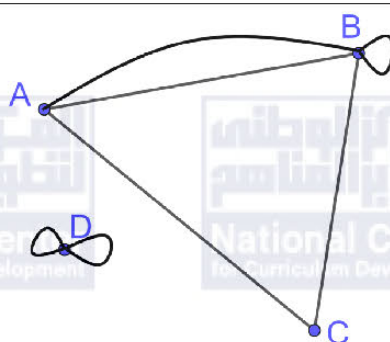
$$\begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



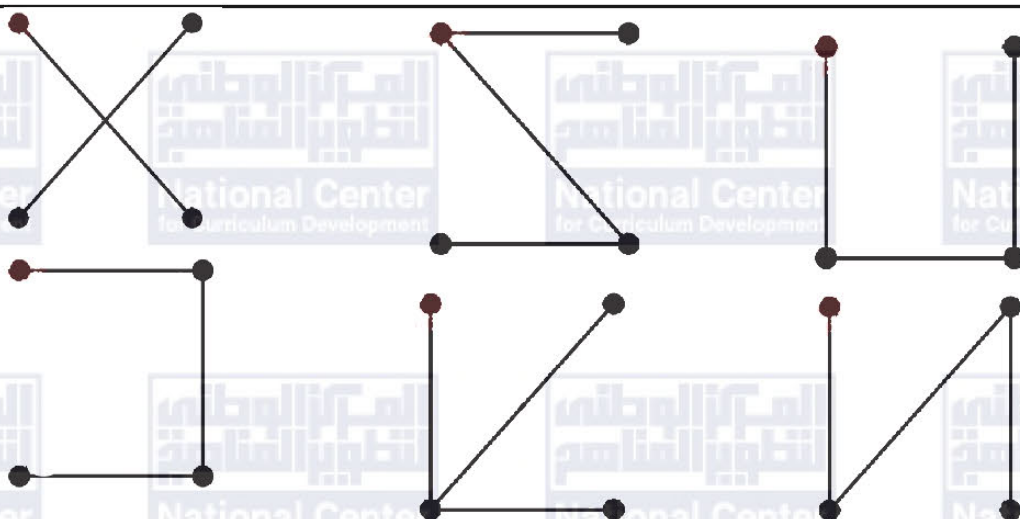
17

	P	Q	R	S	T	U	V
P	—	17	—	—	9	16	—
Q	17	—	3	—	4	—	—
R	—	3	—	4	19	—	—
S	—	—	4	—	—	—	5
T	9	4	19	—	—	12	18
U	16	—	—	—	12	—	15
V	—	—	—	5	18	15	—

18



19





الدرس الخامس: مخططات أويلر

المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك)
نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها.

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
زوجية	2	A
زوجية	2	B
زوجية	6	C
زوجية	2	D
زوجية	4	E
زوجية	2	F
زوجية	2	G
زوجية	2	H
زوجية	2	S

بما أن جميع درجات رؤوس المخطط زوجية، فإن المخطط أويلري.

المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك)
نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها.

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
زوجية	2	A
زوجية	4	B
زوجية	4	C
زوجية	2	D
زوجية	2	E
زوجية	4	F
زوجية	4	G
زوجية	2	H

بما أن جميع درجات رؤوس المخطط زوجية، فإن المخطط أويلري.



المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك)
نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها.

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
زوجية	2	V
زوجية	4	W
زوجية	4	X
فردية	3	Y
فردية	3	Z

بما أنه يوجد رأسان فقط، درجة كل منهما فردية، فإن المخطط شبه أويلري.

المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، شبه أويلري، أو غير ذلك)
نحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها.

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
زوجية	2	A
زوجية	4	B
زوجية	4	C
زوجية	4	D
زوجية	2	E
زوجية	4	F
فردية	3	G
فردية	3	H
زوجية	4	R

بما أنه يوجد رأسان فقط، درجة كل منهما فردية، فإن المخطط شبه أويلري.

نلاحظ من المخطط أن درجة كل رأس من رؤوسه زوجية، ما يعني أن المخطط أويلري، ومنه، فإن
طول أقصر مسار أويلري في المخطط يساوي الوزن الكلي للمخطط.

$$10 + 20 + 8 + 40 + 30 + 50 + 19 + 11 + 6 + 35 + 12 + 23 = 264$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المخطط، يبدأ بالرأس G، وينتهي به، هو: 264 وحدة.



6

نلاحظ من المخطط وجود رأسين فقط، درجة كل منهما فردية، ما يعني أن المخطط شبه أوليري.
الرأسان اللذان درجتهم فردية هما: C و B، وأقصر طريق يصل بينهما هو: BAC، لذا نكرر
حافات هذا الطريق في المخطط.
نجد الوزن الكلي للمخطط الناتج:

$$13 + 13 + 11 + 11 + 8 + 14 + 18 + 27 = 115$$

إذن، طول أقصر مسار أوليري في المخطط، يبدأ بالرأس C، وينتهي به، هو: 115 وحدة.

7

نلاحظ من المخطط وجود أكثر من رأسين درجة كل منهما فردية، ما يعني أن المخطط ليس أوليرياً
ولا شبه أوليري.

الرؤوس ذات الدرجة الفردية في المخطط هي: C, H, D, F.

نحدد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية لتصبح جميع الرؤوس ذات
درجات زوجية، ثم نجد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.

	الحافات المضافة	مجموع أوزان الحافات المضافة
الطريقة الأولى	CH, DF	$400 + 160 = 560$
الطريقة الثانية	CD, HF	$200 + 220 = 420$
الطريقة الثالثة	CF, DH	$180 + 380 = 560$

الطريقة التي أضيفت فيها حافات إلى المخطط وزنها أقل ما يمكن هي الطريقة الثانية، لذا نكرر
حافات هذه الطريقة، ونجد الوزن الكلي للمخطط الناتج:

$$60 + 60 + 140 + 140 + 220 + 220 + 340 + 250 + 410 + 210 + 150 + 230 + 320 + 350 + 230 + 330 + 200 + 190 + 180 + 160 + 210 = 4600$$

إذن، طول أقصر مسار أوليري يمكن أن تمر به المهندسة لإنجاز مهمتها هو: 4600 m.



الوحدة الثالثة: البرمجة الخطية
أستعد لدراسة الوحدة

استعمال المتباينات الخطية بمتغيرين للتعبير عن موقف حياتي صفحة 36

1

أفرض أن طول النوع الأول x ، وطول النوع الثاني y ، فتكون المتباينة:

$$4x + 6y \leq 72$$

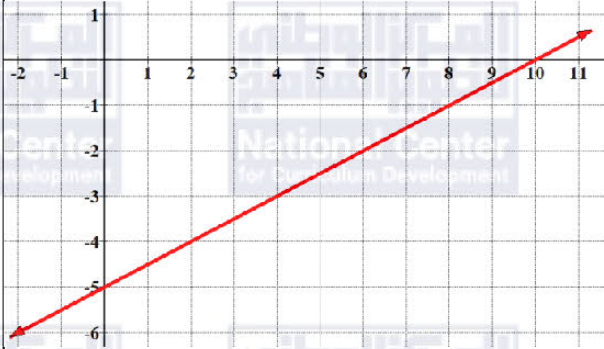
2

أفرض أن كمية العنب x kg، وأن كمية التفاح y kg، فتكون المتباينة:

$$1.5x + y \leq 6$$

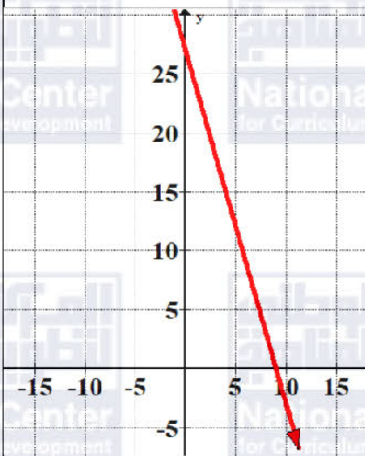
تمثيل معادلة خطية بمتغيرين صفحة 36

3



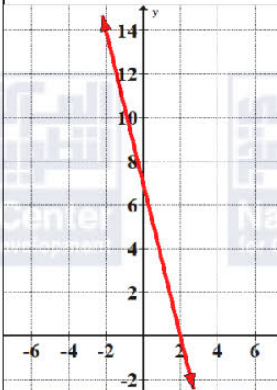
المقطع x هو 10، والمقطع y هو -5.

4



المقطع x هو 9، والمقطع y هو 27.

5



المقطع x هو 2، والمقطع y هو 7.



حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بطريقة الحذف صفحة 37

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

بجمع المعادلتين:

$$6 \quad 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

بالتعويض في المعادلة الأولى:

$$3 + y = 5 \Rightarrow y = 2$$

حل النظام (3,2)

$$2x + y = 9$$

$$x - y = 0$$

بجمع المعادلتين:

$$7 \quad 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

بالتعويض في المعادلة الأولى:

$$6 + y = 9 \Rightarrow y = 3$$

حل النظام (3,3)

$$x - y = 5$$

$$x + 2y = -1$$

بطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية:

$$8 \quad 3y = -6 \Rightarrow y = -2$$

بالتعويض في المعادلة الأولى:

$$x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$$

حل النظام (3, -2)

تحديد إذا كان زوج مرتب يمثل حلا لمتباينة خطية بمتغيرين صفحة 38

$$(0) + 3(1) <? 6$$

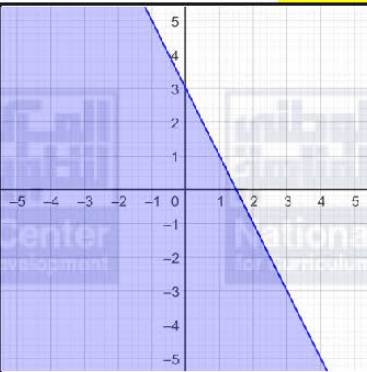
$$3 < 6 \quad \checkmark$$

9

نلاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة فإن الناتج يكون صحيحاً.

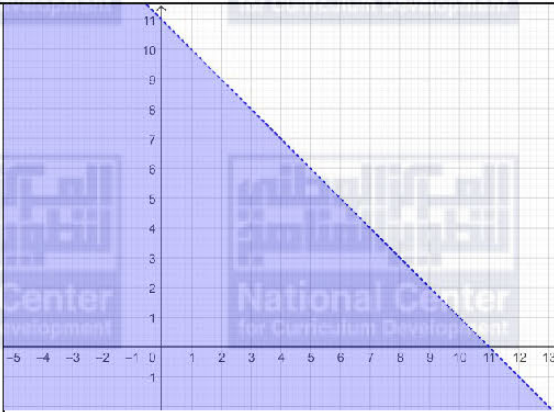
إذن، الزوج المرتب (0,1) هو أحد الحلول الممكنة للمتباينة.



10	$(-2) + 3(4) < ? 6$ $10 < 6 \times$	نلاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة فإن الناتج لا يكون صحيحًا. إذن، الزوج المرتب $(-2, 4)$ ليس أحد الحلول الممكنة للمتباينة.
11	$(8) + 3(-1) < ? 6$ $5 < 6 \checkmark$	نلاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة فإن الناتج يكون صحيحًا. إذن، الزوج المرتب $(8, -1)$ هو أحد الحلول الممكنة للمتباينة.
12	$-3(-5) + 4(3) \geq ? 12$ $27 \geq 12 \checkmark$	نلاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة فإن الناتج يكون صحيحًا. إذن، الزوج المرتب $(-5, 3)$ هو أحد الحلول الممكنة للمتباينة.
13	$-3(0) + 4(2) \geq ? 12$ $8 \geq 12 \times$	نلاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة فإن الناتج لا يكون صحيحًا. إذن، الزوج المرتب $(0, 2)$ ليس أحد الحلول الممكنة للمتباينة.
14	$-3(3) + 4(7) \geq ? 12$ $19 \geq 12 \checkmark$	نلاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة فإن الناتج يكون صحيحًا. إذن، الزوج المرتب $(3, 7)$ هو أحد الحلول الممكنة للمتباينة.
تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً صفحة 39		
15		المقطع x للمستقيم الحدودي هو 1.5، والمقطع y له هو 3 أعوض النقطة $(0, 0)$ في المتباينة فينتج أن: $0 \leq 3 - 0 \Rightarrow 0 \leq 3$ وهذه العبارة صحيحة لذلك أظل الجهة التي تحتوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.



16

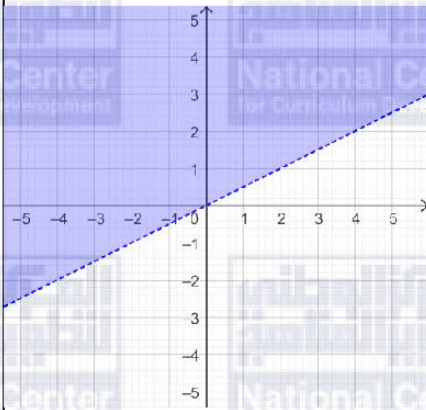


المقطع x للمستقيم الحدودي هو 11، والمقطع y له هو 11
أعوض النقطة $(0, 0)$ في المتباينة فينتج

$$0 + 0 < 11$$

أن: وهذه العبارة صحيحة لذلك أظل الجهة التي تحتوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.

17



المقطع x للمستقيم الحدودي هو 0، والمقطع y له هو 0، أفرض أن x

تساوي 2، وأحل المعادلة $2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 1$ ، لذلك أرسم

المستقيم الحدودي ماراً بالنقطتين $(0, 0)$ ، $(2, 1)$

أعوض النقطة $(0, 1)$ في المتباينة فينتج أن: $0 - 2(1) < 0$

أي $-2 < 0$ ، وهذه العبارة صحيحة لذلك أظل الجهة التي تحتوي النقطة $(0, 1)$ كما في الشكل المجاور.

18



المستقيم الحدودي هو: $4y - 8 = 0 \Rightarrow y = 2$

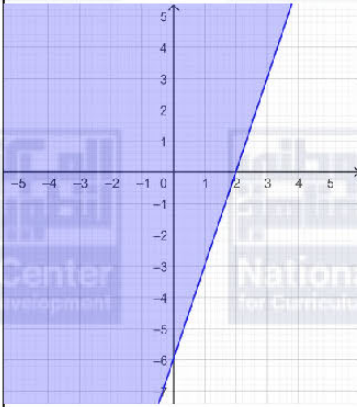
وهذا المستقيم يوازي المحور الأفقي ويقطع المحور y عند 2

إذا عوضت $(0, 0)$ في المتباينة ينتج أن $0 - 8 \geq 0$ ، وهذه عبارة غير

صحيحة، لذلك أظل الجهة التي لا تحتوي $(0, 0)$ كما في الشكل المجاور.



19

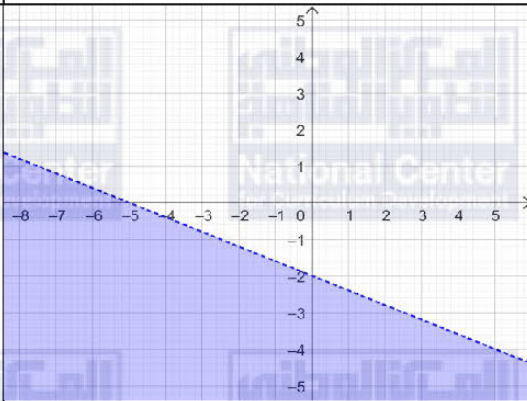


المقطع x للمستقيم الحدودي هو 2، والمقطع y له هو -6.

أعوض النقطة $(0, 0)$ في المتباينة فينتج أن: $3(0) - 0 \leq 6$

أي $0 \leq 6$ ، وهذه العبارة صحيحة لذلك أظل الجهة التي تحتوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.

20

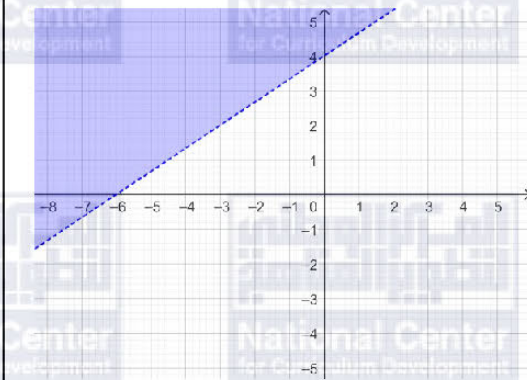


المقطع x للمستقيم الحدودي هو -5، والمقطع y له هو -2.

أعوض النقطة $(0, 0)$ في المتباينة فينتج أن: $0 + 0 < -10$

وهذه العبارة غير صحيحة لذلك أظل الجهة التي لا تحتوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.

21



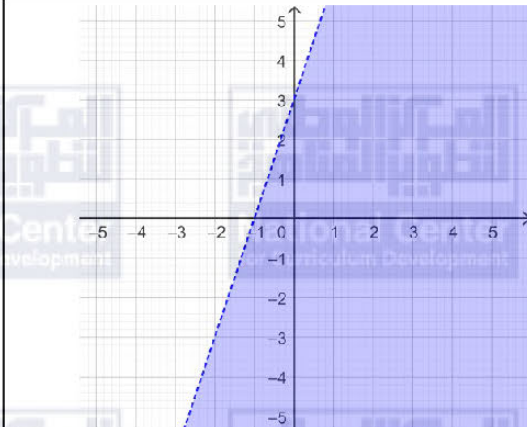
المقطع x للمستقيم الحدودي هو -6، والمقطع y له هو 4

أعوض النقطة $(0, 0)$ في المتباينة فينتج أن:

$$0 < -10 \text{، أي } -4(0) + 5(0) < -10$$

وهذه العبارة غير صحيحة لذلك أظل الجهة التي لا تحتوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.

22



المقطع x للمستقيم الحدودي هو -1، والمقطع y له هو 3

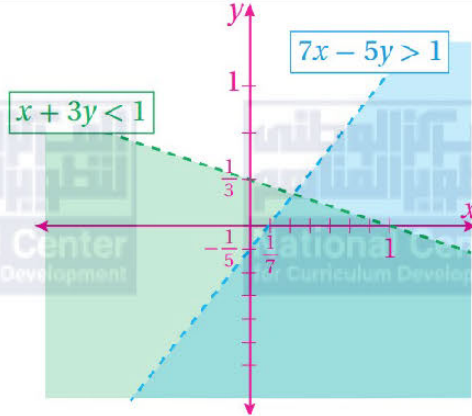
أعوض النقطة $(0, 0)$ في المتباينة فينتج أن: $0 < 0 + 3$

وهذه العبارة صحيحة لذلك أظل الجهة التي تحتوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.



الدرس الأول: حل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيا

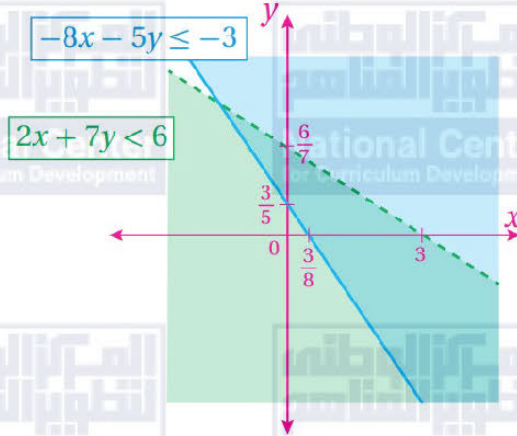
1



منطقة الحل هي المنطقة المظلمة بمزيج من اللونين الأزرق والأخضر.
للتحقق من صحة الحل، نختار النقطة $(0, -6)$ الواقعة في منطقة الحل ونعوضها في كلتا المتباينتين:

$7(0) - 5(-6)$	$=$	30	$>$	1	✓
$0 + 3(-6)$	$=$	-18	$<$	1	✓

2



منطقة الحل هي المنطقة المظلمة بمزيج من اللونين الأزرق والأخضر.
للتحقق من صحة الحل، نختار النقطة $(2, 0)$ الواقعة في منطقة الحل ونعوضها في كلتا المتباينتين:

$2(2) + 7(0)$	$=$	4	$<$	6	✓
$-8(2) - 6(0)$	$=$	-16	$\leq$	-3	✓

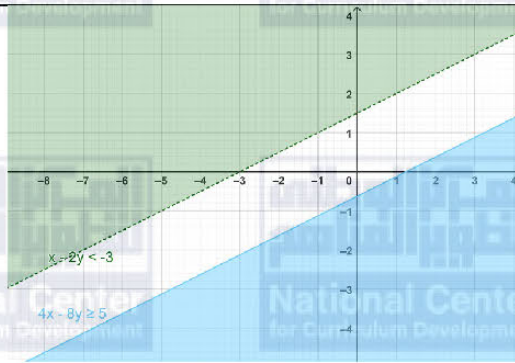


المركز الوطني لتطوير المناهج

National Center for Curriculum Development

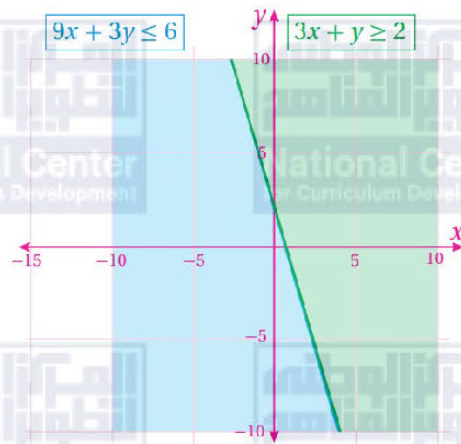
المركز الوطني
لتطوير المناهج
National Center
for Curriculum Development

3



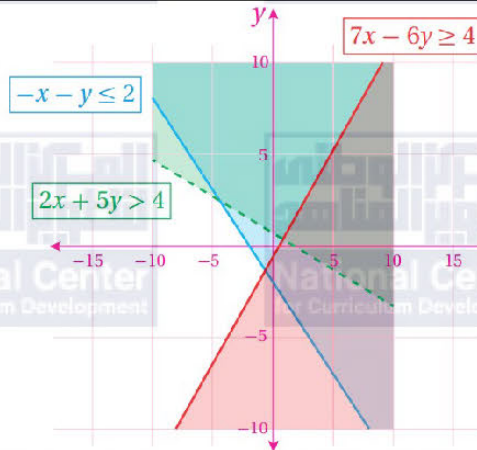
لا توجد منطقة مشتركة، لذا لا يوجد حل للنظام.

4



منطقة الحل هي فقط المستقيم $3x + y = 2$ ، وهو يمثل تقاطع المنطقتين.

5



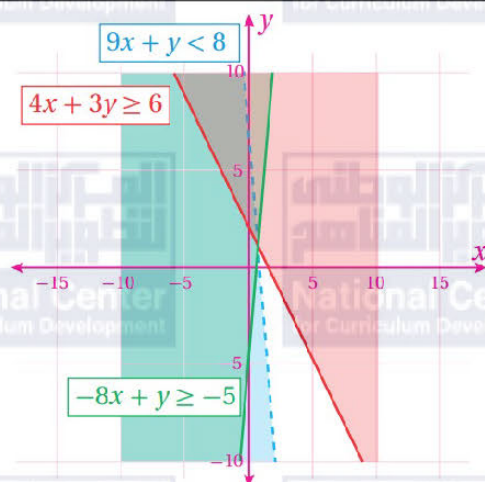
منطقة الحل هي المنطقة المظلمة بمزيج من الألوان الأزرق والأخضر والزهري.

للتحقق من صحة الحل، نختار النقطة (5,0) الواقعة في منطقة الحل ونعوضها في المتباينات:

$2(5) + 5(0)$	$=$	10	$>$	4	✓
$7(5) - 6(0)$	$=$	35	$\geq$	4	✓
$-5 - 0$	$=$	-5	$<$	2	✓



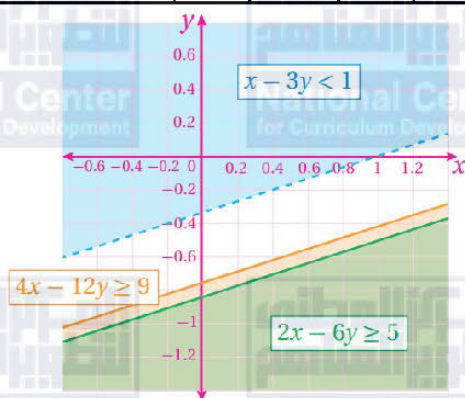
6



منطقة الحل هي المنطقة المظللة بمزيج من الألوان الأزرق والأخضر والأصفر. للتحقق من صحة الحل، نختار النقطة (0,6) الواقعة في منطقة الحل ونعوضها في المتباينات:

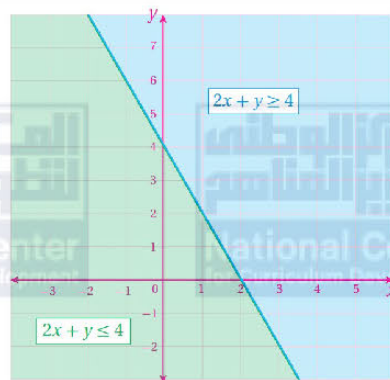
$4(0) + 3(6)$	$=$	18	$\geq$	6	✓
$9(0) + 6$	$=$	6	$<$	8	✓
$-8(0) + 6$	$=$	6	$\geq$	-5	✓

7



لا يوجد حل لهذا النظام لعدم وجود منطقة مشتركة بين حلول المتباينات الثلاثة.

8



مجموعة حلول هذا النظام هي نقاط المستقيم الحدودي الممثل بالشكل

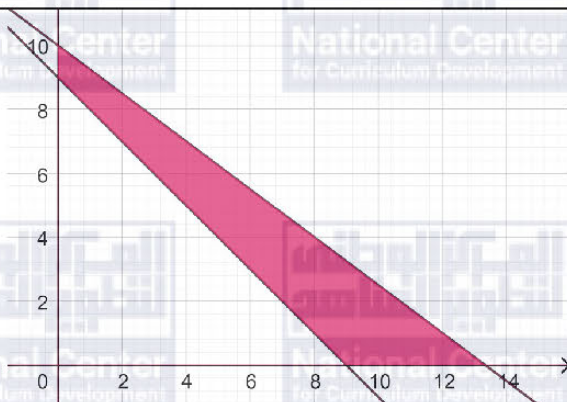


نفرض x عدد وجبات النوع الأول، y عدد وجبات النوع الثاني.

$$x + y > 9$$

$$1.5x + 2y \leq 20$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$



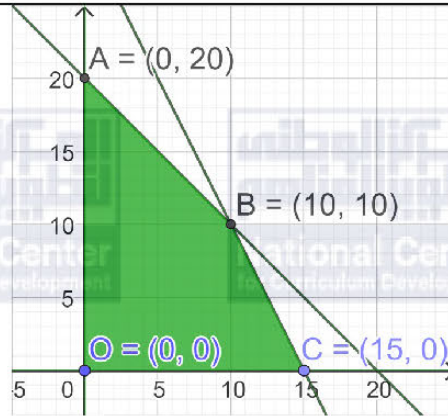
$(1,4), (8,5), (3,2)$



الدرس الثاني: البرمجة الخطية

1	رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$Q = 4x + 2y$
	$A(0,4)$	$Q = 4(0) + 2(4) = 8$
	$B(3,1)$	$Q = 4(3) + 2(1) = 14$
	$C(6,0)$	$Q = 4(6) + 2(0) = 24$

النقطة التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يمكن هي: $A(0,4)$



2	رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$W = x + 2y$
	$A(0,20)$	$W = (0) + 2(20) = 40$
	$B(10,10)$	$W = (10) + 2(10) = 30$
	$C(15,0)$	$W = (15) + 2(0) = 15$
	$O(0,0)$	$W = (0) + 2(0) = 0$

النقطة التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يمكن هي: $A(0,20)$



نفرض x عدد الدراجات من النوع A، y عدد الدراجات من النوع B.

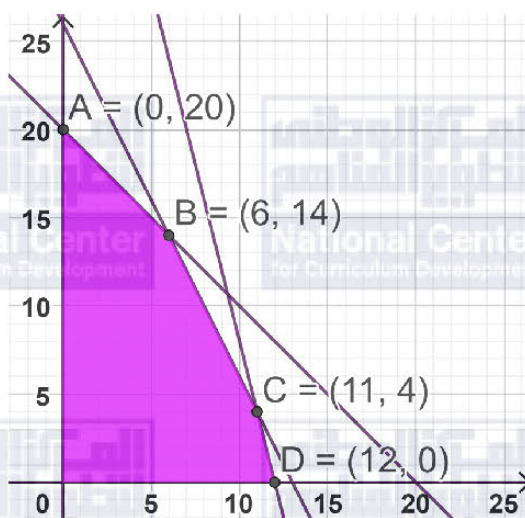
$$2x + 2y \leq 40$$

$$4x + y \leq 48$$

$$x + 0.5y \leq 13$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$P = 45x + 30y$$



3

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 45x + 30y$
$A(0, 20)$	$P = 45(0) + 30(20) = 600$
$B(6, 14)$	$P = 45(6) + 30(14) = 690$
$C(11, 4)$	$P = 45(11) + 30(4) = 615$
$D(12, 0)$	$P = 45(12) + 30(0) = 540$
$O(0, 0)$	$P = 45(0) + 30(0) = 0$

إذن، لتحقيق أكبر ربح ممكن، يتعين على المصنع إنتاج 6 دراجات من النوع A و 14 دراجة من النوع B.



نفرض x عدد الطاولات المستطيلة، y عدد الطاولات الدائرية.

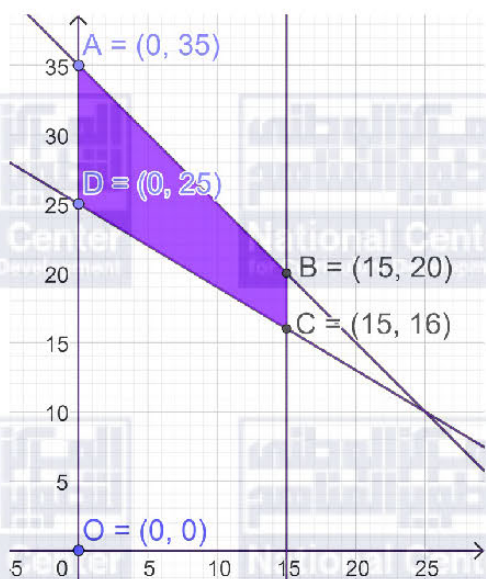
$$6x + 10y \geq 250$$

$$x + y \leq 35$$

$$x \leq 15$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$P = 28x + 52y$$



4

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 28x + 52y$
$A(0,35)$	$P = 28(0) + 52(35) = 1820$
$B(15,20)$	$P = 28(15) + 52(20) = 1460$
$C(15,16)$	$P = 28(15) + 52(16) = 1252$
$D(0,25)$	$P = 28(0) + 52(25) = 1300$

إذن، لتحقيق أقل تكلفة ممكنة، يتعين على فاطمة استئجار 15 طاولة مستطيلة و 16 طاولة دائرية.